Caractérisation des éléments de meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque.

Par IVAN SINGER à Bucarest (Roumanie).

§ 1. Caractérisation des éléments de meilleure approximation dans le cas d'un sous-espace linéaire quelconque.

1. Soient E un espace de Banach réel quelconque, G un sous-espace linéaire de E et x un élément de E n'appartenant pas à G. On appelle *élément de meilleure approximation de l'élément* x tout élément $q \in G$ ayant la propriété

$$\|x-q\| = \inf_{z \in G} \|x-z\|.$$

Le problème que nous allons envisager est de *caractériser* les éléments de meilleure approximation d'un élément donné quelconque $x \in E$.

Un cas particulier important est celui où $G = G_n = [x_1, \ldots, x_n]$, c'est-à-dire où G est le sous-espace linéaire de E engendré par n éléments linéairement indépendants donnés $x_1, \ldots, x_n$. Dans ce cas, en appelant *polynôme* toute combinaison linéaire $p = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ des x_i, il s'agit de caractériser les polynômes de meilleure approximation.

Jusqu'à présent, ce problème n'a été posé — et résolu — que dans quelques cas particuliers. Parmi ces résultats particuliers citons les suivants:

a) Soit $E = L(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur un ensemble quelconque Ω par rapport à une mesure complètement additive m, et soit G un sous-espace linéaire de E. Pour que $q \in G$ soit un élément de meilleure approximation de $x \in E \setminus G$, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1.1) \qquad \int_\Omega z(t) \operatorname{signe}[q(t)-x(t)]\, dm(t) = 0$$

pour tout $z \in G$ (cf. M. G. KREIN [1]).

b) Soit $E = H$ un espace hilbertien réel complet quelconque, et soit G un sous-espace linéaire de E. Pour que $q \in G$ soit un élément de meilleure approximation de $x \in E \setminus G$, il faut et il suffit que l'on ait

(1.2) $$(z, q-x)=0$$

pour tout $z \in G$ (cf. par exemple [1]).

c) Soit $E=C(Q)$ l'espace de toutes les fonctions réelles continues sur un espace de Hausdorff bicompact Q, et soit $G=[x_1, \ldots, x_n]$, les éléments x_i formant un système de Tchébychef sur Q. Pour que $q(t) \in G$ soit un polynôme de meilleure approximation de $x(t) \in E \setminus G$, il faut et il suffit que la fonction $q(t)-x(t)$ atteigne le maximum de son module en au moins $n+1$ points distincts $t_1, \ldots, t_{n+1}$ de Q, avec les signes

(1.3) $$\operatorname{signe}[q(t_i)-x(t_i)] = \operatorname{signe}(\Delta\Delta_i),$$

où $\Delta = \det\|x_1(t_k), \ldots, x_n(t_k), -x(t_k)\|_{k=1,\ldots,n+1}$ et Δ_i est le complémentaire algébrique de l'élément $-x(t_i)$ dans cette matrice (cf. E. Ya. Rémès [8] [1])).

Si Q est le segment $\langle a, b\rangle$, on en retrouve le théorème connu de Tchébychef—Bernstein (v. [4]).

Dans le présent travail nous nous proposons de caractériser les éléments de meilleure approximation dans un espace de Banach quelconque.

2. Démontrons d'abord le

Théorème 1.1. *Pour que l'élément $q \in G$ soit un élément de meilleure approximation de l'élément $x \in E \setminus G$, il faut et il suffit qu'il existe une fonctionnelle linéaire $f \in E^*$ ayant les propriétés suivantes:*

(1.4) $$\|f\|=1,$$

(1.5) $$f(z)=0 \quad \textit{pour tout} \quad z \in G,$$

(1.6) $$f(x)=-\|q-x\|.$$

Démonstration. *Nécessité.* Si q est un élément de meilleure approximation de x, on a $d=\inf_{z \in G}\|x-z\|=\|x-q\|>0$. En vertu d'une proposition de S. Banach (v. [3], p. 57, lemme), il existe alors une fonctionnelle linéaire $f \in E^*$ ayant les propriétés (1.4), (1.5) et (1.6) [2]).

Suffisance. S'il existe une fonctionnelle linéaire $f \in E^*$ ayant les propriétés (1.4), (1.5) et (1.6), on a pour tout $z \in G$

$$\|x-q\|=|f(x)|=|f(x)-f(z)|=|f(x-z)| \leqq \|x-z\|,$$

donc q est un élément de meilleure approximation de l'élément x.

L'interprétation géométrique du théorème est évidente.

---

1) E. Ya. Rémès a supposé que Q est un compact, mais nous allons voir qu'il suffit de supposer que Q est un espace de Hausdorff bicompact.

2) En effet, si φ est la fonctionnelle qui figure dans le lemme de Banach, on n'a qu'à poser $f=-d\varphi$.

Remarque. Le signe "moins" dans la formule (1. 6) n'est pas essentiel; nous l'avons posé parce qu'il nous sera commode dans les applications.

3. Soit, en particulier, $E = L(\Omega)$. Nous allons montrer que, dans ce cas, du théorème 1. 1 on retrouve facilement le théorème de M. G. KREIN.

En tenant compte de la forme générale des fonctionnelles linéaires sur l'espace $L(\Omega)$, la condition du théorème signifie qu'il existe une fonction $\beta(t)$ ayant les propriétés suivantes:

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t\in\Omega} |\beta(t)| = 1, \tag{1.7}$$

$$\int_\Omega z(t)\beta(t)\,dm(t) = 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in G, \tag{1.8}$$

$$\int_\Omega [q(t)-x(t)]\beta(t)\,dm(t) = \int_\Omega |q(t)-x(t)|\,dm(t). \tag{1.9}$$

Les relations (1. 7) et (1. 9) entraînent $\beta(t) = \text{signe}\,[q(t)-x(t)]$. En effet, si l'on avait $[q(t)-x(t)]\beta(t) \neq |q(t)-x(t)|$ sur un ensemble $\Sigma \subset \Omega$ avec $m(\Sigma) > 0$, on aurait, en vertu de la relation (1. 7), $[q(t)-x(t)]\beta(t) < < |q(t)-x(t)|$ presque partout sur Σ, d'où il résulterait

$$\int_\Omega [q(t)-x(t)]\beta(t)\,dm(t) < \int_\Omega |q(t)-x(t)|\,dm(t),$$

ce qui contredit à (1. 9).

Donc l'existence d'une fonction $\beta(t)$ avec les propriétés (1. 7)—(1. 9) entraîne la relation (1. 1).

D'autre part, si (1. 1) est vérifié, la fonction $\beta(t) = \text{signe}\,[q(t)-x(t)]$ jouira évidemment des proprietés (1. 7)—(1. 9).

4. Si E est un espace hilbertien, toute fonctionnelle linéaire est engendrée par un élément de E en forme d'un produit scalaire, donc les conditions (1. 4)—(1. 6) signifient qu'il existe un $u \in E$ tel que

$$\|u\| = 1, \tag{1.10}$$

$$(z, u) = 0 \quad \text{pour tout} \quad z \in G, \tag{1.11}$$

$$(x, u) = -\|q-x\|. \tag{1.12}$$

Or, la condition que pareil u existe est équivalente avec la condition (1. 2). En effet, s'il existe un u avec les propriétés (1. 10)—(1. 12), on a $(q-x, u) = \|q-x\| = \|q-x\| \cdot \|u\|$, donc $u = \dfrac{q-x}{\|q-x\|}$ et, par conséquent, (1. 2) découle de (1. 11). D'autre part, si la condition (1. 2) est vérifiée, l'élément $u = \dfrac{q-x}{\|q-x\|}$ jouira évidemment des propriétés (1. 10)—(1. 12).

3. Remarquons enfin que du théorème 1. 1 il résulte le suivant critère de l'unicité de l'élément de meilleure approximation:

Pour que tout élément $x \in E$ *ait au plus un élément* $q \in G$ *de meilleure approximation, il faut et il suffit qu'il n'existe aucune fonctionnelle linéaire* $f \in E^*$ *telle que* 1° $\|f\| = 1$, 2° $f(z) = 0$ *pour tout* $z \in G$, 3° $f(x) = \|x\|$ *pour du moins deux éléments différents* $x \in E$ *dont la différence appartient à* G.

Le théorème d'unicité ci-dessus se trouve implicitement dans le travail [6], mais sous une forme géométrique (v. [6], lemme 2. 1).

§ 2. Quelques propriétés des valeurs moyennes.

1. Soient E un espace de Banach réel quelconque, E^* l'espace adjoint et S^* la sphère unité de E^*.

Soit F un ensemble quelconque de points extrêmes non opposés (c'est-à-dire tels que $f \in F$ entraîne $-f \notin F$) de la sphère S^*, muni de la topologie induite par la topologie faible de E^*. A chaque élément $x \in E$ correspond, d'une façon naturelle, une fonction $x(f) \in C(F)$ définie par

$$x(f) = f(x) \quad \text{pour tout} \quad f \in F. \tag{2. 1}$$

A chaque élément $x \in E$ et à chaque densité extérieure $\mu(e)$ de l'espace F (au sens de A. A. MARKOFF; $\mu(F) = 1$), nous ferons correspondre le nombre

$$m(x) = \int_F x(f)\, d\mu(e). \tag{2. 2}$$

Nous dirons que, pour μ fixé, m est une *valeur moyenne* de l'ensemble F.

Un exemple important est où F est un ensemble fini:

$$F = \{f_1, \ldots, f_h\}. \tag{2. 3}$$

Dans ce cas $m = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_h f_h$, où $\lambda_i = \mu(\{f_i\}) \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{h} \lambda_i = 1$; nous dirons que m est une "combinaison convexe" des f_i.

Il s'ensuit immédiatement de la définition que m est une fonctionnelle linéaire, $m \in E^*$, avec

$$\|m\| \leqq 1. \tag{2. 4}$$

Rappelons encore la proposition suivante: Pour toute fonctionnelle linéaire $\varphi \in E^*$ avec $\|\varphi\| = 1$ il existe un ensemble F de points extrêmes non opposés de la sphère S^* et une valeur moyenne m de F, tels que $\varphi = m$ (cf. [6], lemme 1. 8).

2. On aura encore besoin de la suivante caractérisation des éléments de meilleure approximation:

Lemme 2. 1. *Pour qu'un élément $q \in G$ soit un élément de meilleure approximation de l'élément $x \in E \setminus G$, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble F de points extrêmes non opposés de la sphère S^* et une valeur moyenne m de F, tels que*

$$m(z)=0 \quad \text{pour tout} \quad z \in G, \tag{2.5}$$

$$m(x)=-\|q-x\|. \tag{2.6}$$

Démonstration. La *nécessité* découle du théorème 1. 1 et de la proposition mentionnée ci-dessus.

Suffisance. Si $x \in E \setminus G$ et si la condition du lemme 2. 1 est vérifiée, les relations (2. 4), (2. 5) et (2. 6) entraînent $\|m\|=1$, donc la fonctionnelle linéaire $m \in E^*$ possède les propriétés (1. 4)—(1. 6) et, compte tenant du théorème 1. 1, q est un élément de meilleure approximation de x.

3. Nous allons enfin démontrer un lemme qui est également nécessaire dans ce qui suit.

Lemme 2. 2. *Soient E_k un espace de Banach de dimension finie k, F un ensemble quelconque de points extrêmes non opposés de la sphère unité S_k^* de l'espace adjoint E_k^*, et m une valeur moyenne de l'ensemble F, avec $\|m\|=1$. Il existe alors un ensemble $F_h=\{f_1, \dots, f_h\}$ de points extrêmes non opposés de la sphère S_k^*, où $h \leqq k$, tel que m soit une valeur moyenne de l'ensemble F_h aussi.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où l'ensemble F contient plus de k éléments. Puisque par hypothèse $\|m\|=1$, m appartient à au moins une face Γ de la sphère S_k^*. La face Γ étant un ensemble extrême[3] de la sphère S_k^*, elle est régulièrement convexe, donc, en vertu du théorème connu de M. Krein et V. Chmoulyan (cf. p. ex. [6], p. 100) m est une valeur moyenne de l'ensemble F' des points extrêmes de cette face aussi. On voit aisément que F' est un ensemble de points extrêmes non opposés de la sphère S_k^* (cf. p. ex. [5], p. 60, proposition 1). Si l'ensemble F' contient au plus k éléments, le lemme 2. 1 est démontré; supposons donc qu'il contient plus de k éléments. Puisque la face Γ appartient à une variété linéaire de dimension $k-1$ de E_k^*, en vertu des propriétés connues des corps convexes des espaces de dimension finie il résulte que, en prenant tous les polyèdres convexes engendrés par des groupes de k éléments de l'ensemble F', la réu—

[3]) Étant donné un ensemble convexe non vide A d'un espace vectoriel réel V, on appelle ensemble extrême de A toute partie convexe non vide B de A, telle qu'il n'existe aucun segment de A non contenu dans B et contenant à l'intérieur un point de B (v. [5], p. 60, définition 1).

nion de ces polyèdres recouvre la face Γ entière. Étant donné que $m \in \Gamma$, il s'ensuit qu'il existe au moins un polyèdre convexe contenant m, engendré par k éléments de l'ensemble F'; en prenant comme ensemble F_k ces k éléments (qui forment évidemment un ensemble de points extrêmes non opposés de la sphère S_k^*), il en résulte que m est une valeur moyenne de l'ensemble F_k aussi.

§ 3. Caractérisation des polynômes de meilleure approximation.

1. Soient E un espace de Banach réel quelconque et $x_1, \ldots, x_n$ n éléments linéairement indépendants de E. L'ensemble G_n de tous les polynômes $p = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ est un sous-espace linéaire de E, donc le théorème 1. 1 constitue une caractérisation des polynômes de meilleure approximation. Or, en utilisant le fait que le sous-espace G_n est de dimension finie n, on peut démontrer un théorème plus fort, convenable pour les applications:

Théorème 3. 1. *Pour que $q \in G_n$ soit un polynôme de meilleure approximation de l'élément $x \in E \setminus G_n$, il faut et il suffit qu'il existe $h \leqq n+1$ points extrêmes non opposés $f_1, \ldots, f_h$ de la sphère S^* et une combinaison convexe $m = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_h f_h$ telle que*

$$m(x_i) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3. 1}$$

$$m(-x) = \|q - x\|. \tag{3. 2}$$

Démonstration. *Nécessité.* Si q est un polynôme de meilleure approximation de l'élément $x \in E \setminus G_n$, il est également un polynôme de meilleure approximation de l'élément x dans le sous-espace $E_{n+1} = [x_1, \ldots, x_n, x]$ de dimension $n+1$. Il existe donc, en vertu du lemme 2. 1, un ensemble de points extrêmes non opposés de la sphère unité S_{n+1}^* de l'espace adjoint E_{n+1}^* et une valeur moyenne $\overline{m}$ de l'ensemble F, avec $\|\overline{m}\| = 1$ (v. la démonstration du lemme 2. 1), tels que $\overline{m}$ vérifie (3. 1) et (3. 2). Or, en vertu du lemme 2. 2 il existe un ensemble $F_h = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_h\}$ de points extrêmes non opposés de la sphère S_{n+1}^*, où $h \leqq n+1$, tel que $\overline{m}$ soit une valeur moyenne de F_h: $\overline{m} = \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_h \varphi_h$. Mais les fonctionnelles linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_h \in E_{n+1}^*$ peuvent être prolongées sur l'espace E entier avec la conservation de leurs normes, de façon que leurs extensions $f_1, \ldots, f_h \in E^*$ soient des points extrêmes (évidemment distincts et non opposés) de la sphère S^* (v. [7], théorème 5). Il s'ensuit que $m = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_h f_h$ répond aux exigences du théorème. La condition du théorème est donc nécessaire.

Suffisance. Si la condition du théorème est vérifiée, la valeur moyenne $m = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_h f_h$ de l'ensemble $F = \{f_1, \ldots, f_h\}$ vérifie la condition du lemme 2.2, donc q est un polynôme de meilleure approximation de l'élément x.

Remarque. Les relations $\lambda_i \geqq 0, \sum_{i=1}^{h} \lambda_i = 1$, (3.1) et (3.2) constituent $2h+1 \leqq 2n+3$ conditions sur les points extrêmes $f_1, \ldots, f_h$ et les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$.

2. Soit, en particulier, $E = C(Q)$, où Q est un espace de Hausdorff bicompact, et supposons que les éléments $x_1, \ldots, x_n$ forment un système de Tchébychef sur Q. Nous allons montrer que, dans ce cas, du théorème 3.1 on retrouve le théorème de E. YA. RÉMÈS, cité au § 1.

Nécessité. Si q est un polynôme de meilleure approximation de l'élément x, il existe, en vertu du théorème 3.1, $h \leqq n+1$ points extrêmes non opposés $f_1, \ldots, f_h$ de la sphère S^* et une valeur moyenne $m = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_h f_h$ telle que l'on ait (3.1) et (3.2). Mais tout point extrême de la sphère S^* est, comme l'ont démontré R. F. ARENS et J. L. KELLEY (v. par exemple [6], p. 101), de la forme

$$f(y) = \varepsilon y(t) \quad \text{pour tout} \quad y \in E,$$

où t est un point quelconque fixe de Q et $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$. Par conséquent, il existe $h \leqq n+1$ points distincts $t_1, \ldots, t_h \in Q$ et h nombres non négatifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ de somme égale à 1, tels que

$$\lambda_1 \varepsilon_1 x_i(t_1) + \cdots + \lambda_h \varepsilon_h x_i(t_h) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3.3}$$

$$\lambda_1 \varepsilon_1 x(t_1) + \cdots + \lambda_h \varepsilon_h x(t_h) = -\|q - x\|, \tag{3.4}$$

où $\varepsilon_k = +1$ ou -1 $(k = 1, \ldots, h)$.

Les équations (3.3) entraînent

$$h = n+1. \tag{3.5}$$

En effet, elles impliquent que tous les mineurs d'ordre h de la matrice $\|x_i(t_k)\|_{\substack{k=1,\ldots,h \\ i=1,\ldots,n}}$ sont nulles, donc, si l'on avait $h < n+1$, en choisissant arbitrairement[4]) des points distincts $t_{h+1}, \ldots, t_n \in Q$, différents de $t_1, \ldots, t_h$, il résulterait que $D = \det \|x_i(t_k)\|_{i,k=1,\ldots,n} = 0$, ce qui contredit à l'hypothèse que les éléments $x_1, \ldots, x_n$ forment un système de Tchébychef sur Q.

Les relations (3.3), (3.4) et (3.5) impliquent

$$\Delta = \det \|x_1(t_k), \ldots, x_n(t_k), -x(t_k)\|_{k=1,\ldots,n+1} \neq 0.$$

Les relations (3.3), (3.5) et l'hypothèse que les éléments (1.1) forment un système de Tchébychef entraînent

$$\lambda_k > 0 \qquad (k = 1, \ldots, n+1). \tag{3.6}$$

[4]) Les éléments $x_1, \ldots, x_n$ étant linéairement indépendants, Q contient au moins n points distincts.

D'autre part, de (3. 3), (3. 4) et (3. 5) on obtient

$$\lambda_1\varepsilon_1[q(t_1)-x(t_1)]+\cdots+\lambda_{n+1}\varepsilon_{n+1}[q(t_{n+1})-x(t_{n+1})]=\|q-x\|. \tag{3.7}$$

Les relations (3. 6) et (3. 7) entraînent évidemment

$$\varepsilon_i[q(t_i)-x(t_i)]=\|q-x\| \qquad (i=1,\ldots,n+1); \tag{3.8}$$

enfin, (3. 3), (3. 4), (3. 5) et (3. 6) etraînent

$$\varepsilon_i=\frac{1}{\lambda_i}\,\frac{-\|q-x\|\cdot\Delta_i}{-\Delta}=\operatorname{sgn}(\Delta\Delta_i) \qquad (i=1,\ldots,n+1),$$

c'est-à-dire (1. 3), et la nécessité de la condition de E. YA. RÉMÈS est ainsi démontrée.

Suffisance. Si la condition du théorème de RÉMÈS est vérifiée, on a $\Delta\neq 0$, et le système d'équations linéaires

$$\lambda_1\varepsilon_1x_i(t_1)+\cdots+\lambda_{n+1}\varepsilon_{n+1}x_i(t_{n+1})=0 \qquad (i=1,\ldots,n), \tag{3.9}$$

$$\lambda_1\varepsilon_1x(t_1)+\cdots+\lambda_{n+1}\varepsilon_{n+1}x(t_{n+1})=-\|q-x\|, \tag{3.10}$$

où l'on a posé $\varepsilon_i=$ signe $[q(t_i)-x(t_i)]$, possède la solution

$$\lambda_i\varepsilon_i=\frac{-\|q-x\|\cdot\Delta_i}{-\Delta}=\frac{\|q-x\|\cdot\Delta_i}{\Delta} \qquad (i=1,\ldots,n+1). \tag{3.11}$$

L'hypothèse (1. 3) et les relations (3. 11) entraînent

$$\lambda_k>0 \qquad (k=1,\ldots,n+1). \tag{3.12}$$

Enfin, de l'hypothèse $x(t_i)=q(t_i)-\varepsilon_i\|q-x\|$ $(i=1,\ldots,n+1)$ et des équations (3. 9) et (3. 10) on obtient

$$-\|q-x\|=\lambda_1\varepsilon_1[q(t_1)-\varepsilon_1\|q-x\|]+\cdots+\lambda_{n+1}\varepsilon_{n+1}[q(t_{n+1})-\varepsilon_{n+1}\|q-x\|]=$$
$$=-(\lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1})\|q-x\|,$$

donc

$$\lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1}=1. \tag{3.13}$$

Or, (3. 12) et (3. 13) montrent que la fonctionnelle linéaire

$$m(y)=\lambda_1\varepsilon_1y(t_1)+\cdots+\lambda_{n+1}\varepsilon_{n+1}y(t_{n+1}) \quad \text{pour tout} \quad y\in E$$

est une valeur moyenne de l'ensemble $F=\{\varepsilon_1y(t_1),\ldots,\varepsilon_{n+1}y(t_{n+1})\}$ de points extrêmes non opposés de la sphère S^*. En même temps, (3. 9) et (3. 10) montrent que l'on a (3. 1) et (3. 2). Donc, en vertu du théorème 3. 1, q est un polynôme de meilleure approximation de l'élément x.

R e m a r q u e. Dans les espaces $C(Q)$, la notion de "système de Tchébychef" admet, comme nous l'avons démontré (v. [6], p. 131), la suivante caractérisation géométrique: Les éléments $x_1,\ldots,x_n$ forment un système de

Tchébychef si, et seulement si, quel que soit le polynôme $p_0 \in G_n$, il n'existe pas n faces non opposées $F_1, \dots, F_n$ de la sphère unité $S \subset C(Q)$, telles que la droite $[0, p_0]$ soit parallèle à l'ensemble $F_1 \cap \dots \cap F_n$ [5]). A son tour, le théorème ci-dessus de E. Ya. Rémès a l'interprétation géométrique suivante:

Si les éléments $x_1, \dots, x_n$ forment un système de Tchébychef, pour que $q \in G_n$ soit un polynôme de meilleure approximation de l'élément $x \in C(Q)$, il faut et il suffit que q appartienne à au moins $n+1$ faces

$$F_i = \{y \in C(Q) \mid \varepsilon_i[y(t_i) - x(t_i)] = \|q - x\|, \|y - x\| = \|q - x\|\}$$

de la sphère de centre x et de rayon $\|q - x\|$, où $\varepsilon_i = \operatorname{sgn}(\Delta\Delta_i)$ $(i = 1, \dots, n+1)$.

3. Le théorème 3. 1 implique le suivant critère de l'unicité du polynome de meilleure approximation:

Pour que tout élément $x \in E$ ait un seul polynôme de meilleure approximation, il faut et il suffit qu'il n'existe pas $h \leqq n+1$ points extrêmes non opposés $f_1, \dots, f_h$ de la sphère S^* et une combinaison convexe $m = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_h f_h$ telle que 1° $m(x_i) = 0$ $(i = 1, \dots, n)$, 2° $m(x) = \|x\|$ pour du moins deux éléments différents $x \in E$, dont la différence appartient à G_n.

On voit facilement que ce théorème est équivalent à un des théorèmes démontrés dans le travail [6] (théorème 2. 2, p. 127).

Bibliographie.

[1] Ахиезер, Н. И., Лекции по теории аппроксимации (Москва—Ленинград, 1947).

[2] Ахиезер, Н. И.—Крейн, М. Г., О некоторых вопросах теории моментов (Харьков, 1938).

[3] Banach, S., *Théorie des opérations linéaires* (Warszawa, 1932).

[4] Bernstein, S., *Leçons sur les propriétés extremales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle* (Paris, 1926).

[5] Ghika, Al., Mulţimi extremale şi hiperplane de sprijin maximale, *Bul. Sti. Acad. R. P. R., Sect. Sti. Mat. Fiz.*, 7 (1955), 59—64.

[6] Singer, I., Proprietăţi ale suprafeţei sferei unitate şi aplicaţii la rezolvarea problemei unicităţii polinomului de cea mai bună aproximaţie în spaţii Banach oarecare, *Studii şi Cercet. Mat.*, 8 (1956), 95—145.

[7] Singer, I., Sur l'extension des fonctionnelles linéaires, *Revue de math. pures et appl.* I, 2 (1956), 99—106.

[8] Ремез, Е. Я., Про методи наукращого в розумінні Чебишова, наближенного представлення функцій (Київ, 1935).

(Reçu le 22 octobre 1956.)

[5]) Rappelons que, dans les espaces $C(Q)$, l'intersection d'un ensemble fini quelconque de faces de la sphère S est toujours non-vide (v. [6], p. 131).